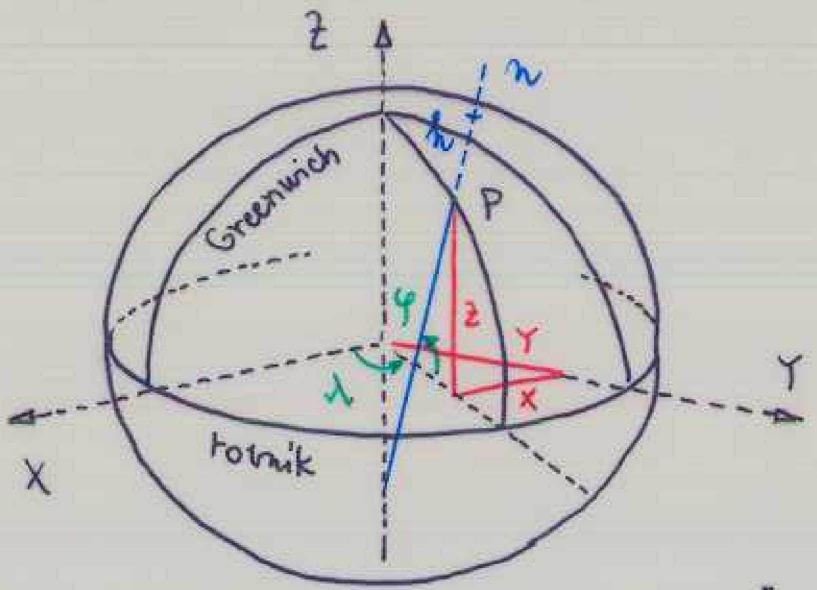
TRANSFORMACE KARTÉZSKÉ ⟷ GEODETICKÉ SOUŘADNICE



- bod na elipsoidu :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \cos\varphi \cos\lambda \\ N \cos\varphi \sin\lambda \\ N(1-e^2) \sin\varphi \end{bmatrix}$$

- bod nad elipsoidem :

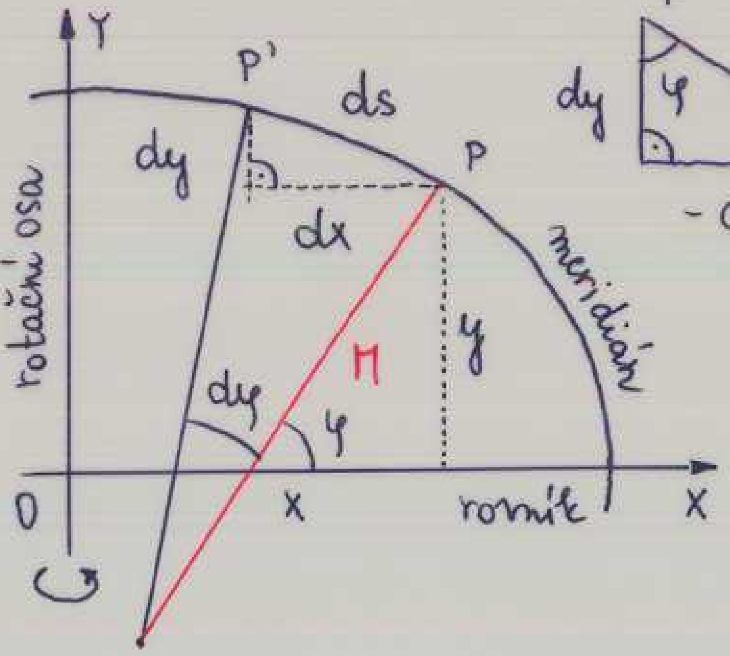
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos\varphi \cos\lambda \\ (N+h) \cos\varphi \sin\lambda \\ [N(1-e^2)+h] \sin\varphi \end{bmatrix}$$

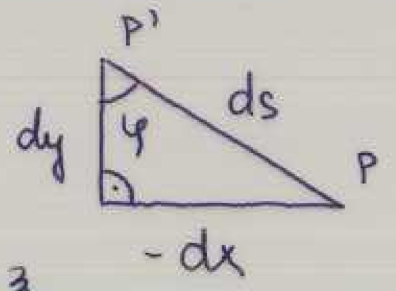
h ... geodetická výška
měřena po normále n !

- kompletní geodetické souřadnice $\{\varphi, \lambda, h\}$ Gauss

! důležité kvůli GPS !

MERIDIÁNOVÝ POLOMĚR KŘIVOSTI ROTAČNÍHO ELIPSOIDU





- délkové elementy ds, dx, dy

$$ds = M\,d\varphi = -\frac{dx}{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad M = -\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{dx}{d\varphi}$$

$$x(\varphi) = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a\cdot\sin\varphi\,(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}} \qquad (m)$$

- minimální pro $\varphi = 0$: $\quad M = a(1-e^2)$
- maximální pro $\varphi = \pm 90°$: $\quad M = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}$

DÉLKA OBLOUKU POLEDNÍKU A ROVNOBĚŽKY ROTAČNÍHO ELIPSOIDU

- délka elementu poledníkového oblouku :

$$ds = M\,d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}\,d\varphi$$

$$s(\varphi_0,\varphi) = a(1-e^2)\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

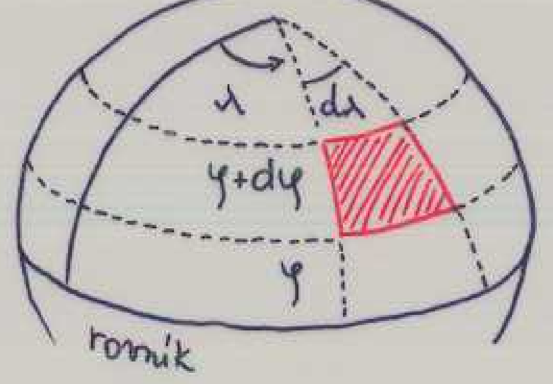
numerika : PC + numerický integrátor (dříve řady)

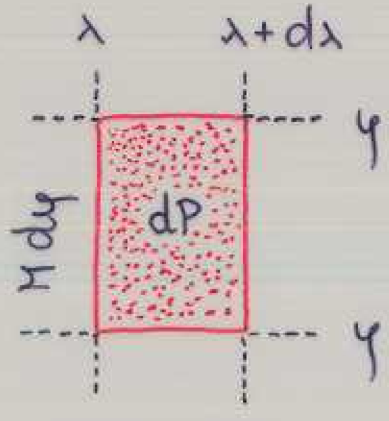
- délka elementu oblouku rovnoběžky :

$$s(\lambda_0,\lambda) = N\cos\varphi\,(\lambda-\lambda_0)$$

λ, λ_0 ... radián

POVRCH ČÁSTI A CELÉHO ROTAČNÍHO ELIPSOIDU





- element plochy:

$$dP = MN\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda$$

- celková plocha:

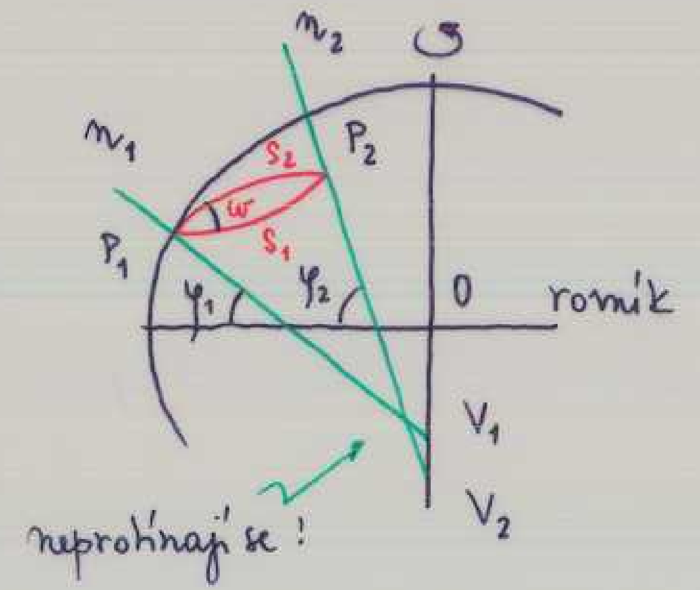
$$P = \iint dP$$

– plocha elipsoidu rotačního:

$$dP = \frac{a^2(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}\, d\varphi\, d\lambda \Rightarrow P = a^2(1-e^2)\,\Delta\lambda \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}$$

$$\boxed{P = a^2(1-e^2)(\lambda_2-\lambda_1)\frac{1}{4e}\left[\ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi} + \frac{2e\sin\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\right]_0^{\varphi}}$$

NORMÁLOVÉ ŘEZY MEZI DVĚMA BODY NA ELIPSOIDU



- dva libovolné body $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$

  $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$

- přímý normálový řez s_1 :

řez elipsoidu rovinou $P_1 V_1 P_2$, která obsahuje normálu n_1 a prochází bodem P_2

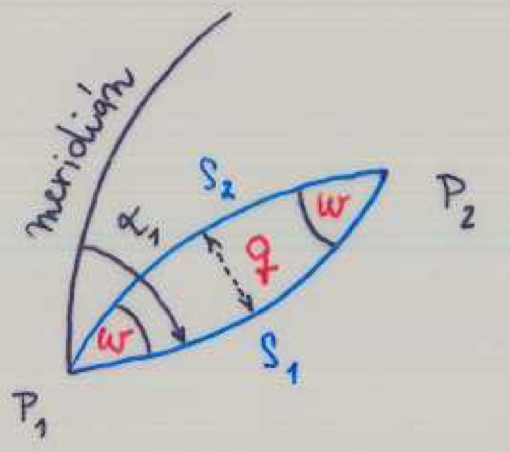
- zpětný normálový řez s_2 :

řez elipsoidu rovinou $P_2 V_2 P_1$, která obsahuje normálu n_2 a bod P_1

- pozor : normály ve dvou bodech jsou obecně mimoběžné !

- normálové řezy splynou, leží-li oba body na stejném poledníku či rovnoběžce tj. pro $\varphi_1 = \varphi_2 \vee \lambda_1 = \lambda_2$

DÉLKA OBLOUKU NORMÁLOVÉHO ŘEZU



- normálové řezy rotačního elipsoidu jsou obecné elipsy resp. jejich části
- délku lze vyjádřit řadou

$$s_1 = N_1 \vartheta_1 \left(1 - \frac{1}{6} \vartheta_1^2 \eta_1^2 \cos^2\alpha_1 + \frac{1}{8} \vartheta_1^3 \eta_1^2 \tan\varphi_1 \cos\alpha_1 - \dots\right)$$

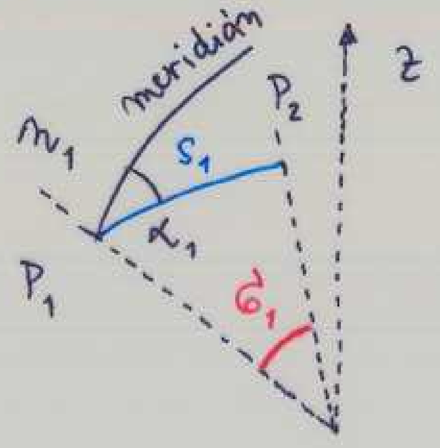
dostatečné pro $s < 100$ km

N_1 ... příčný poloměr v bodě P_1

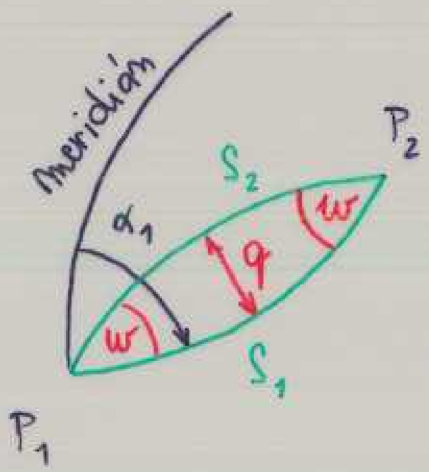
ϑ_1 ... úhel dle obrázku

α_1 ... azimut řezu v bodě P_1

$$\eta_1^2 = e'^2 \cos^2\varphi_1$$



PRŮBĚH VZÁJEMNÝCH NORMÁLOVÝCH ŘEZŮ



- úhel normálových řezů w :

$$w \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{N_1}\right)^2 \eta_1^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1$$

$$\text{pro } \eta_1^2 = e_1'^2 \cos^2\varphi_1$$

- odlehlost vzájemných normálových řezů :

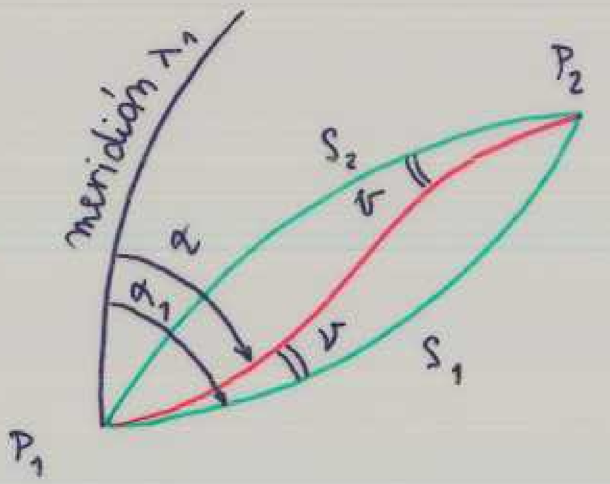
$$q \doteq \frac{1}{8}\,\frac{s_1^3}{N_1^2}\,\eta_1^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1$$

- obě veličiny závisí na s, α, φ :

např. pro $\varphi_1 = 45°$, $\alpha_1 = 45°$, $s_1 = 100$ km

$w \doteq 0{,}042''$ $\quad$ $q \doteq 5{,}2$ mm

GEODETICKÁ ČÁRA NA ROTAČNÍM ELIPSOIDU



- dva normálové řezy pro 2 body,

ale 1 geodetická čára

Definice: křivka, jejíž hlavní normála je v každém bodě totožná s normálou plochy

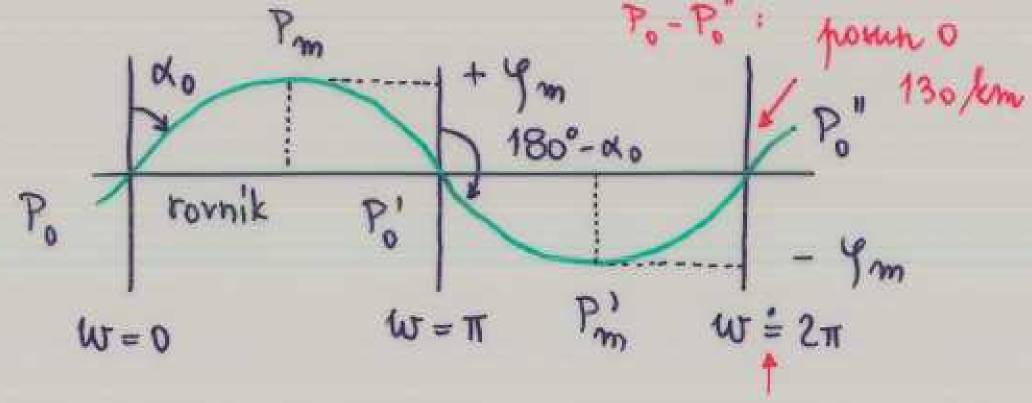
(nejkratší spojnice dvou bodů)

analogie v rovině - přímka, na kouli - hlavní kružnice

- geodetická čára zpravidla probíhá mezi normálovými řezy
- obraz geodetické křivky v rovině konformního zobrazení je křivka
- úhel $\vartheta \doteq \frac{\omega}{3}$ ... neplatí však pro extrémní případy

např. body na jedné rovnoběžce

PRŮBĚH GEODETICKÉ KŘIVKY NA ROTAČNÍM ELIPSOIDU



Clairautova věta :

V každém bodě geodetické křivky je součin příslušného poloměru rovnoběžky a sinu azimutu stejný.

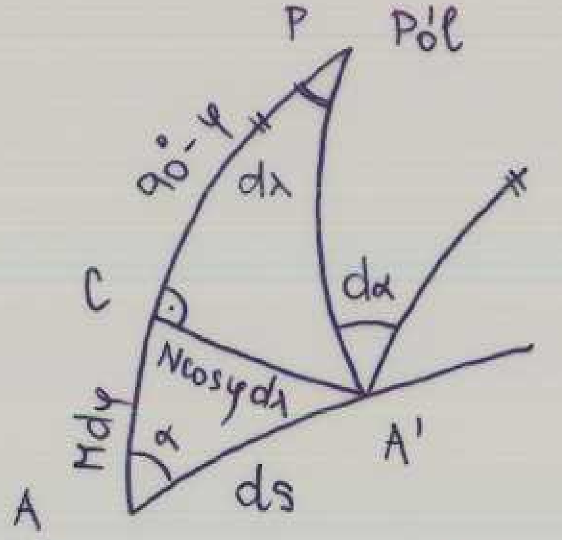
matematicky : $r_i \sin\alpha_i = N_i \cos\varphi_i \sin\alpha_i = \text{konst.}$

- nejsevernější bod P_m : azimut $\alpha_m = 90°$
- nejjižnější bod P_m' : azimut $\alpha'_m = 90°$

bod P_0 a P_0'' nejsou totožné !

- obrázek : křivka začne na rovníku pod azimutem α_0

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE GEODETICKÉ KŘIVKY



ds ... element geodetické čáry s,

která vychází z bodu A pod azimutem α

$\widehat{AP}$ a $\widehat{A'P}$ ... oblouky poledníků

$\widehat{A'C}$ ... oblouk rovnoběžky

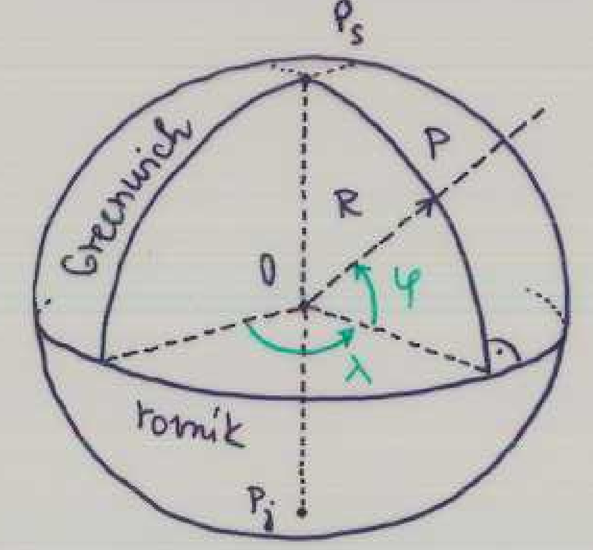
- řešení elementárního $\Delta\, AA'C$:

diferenciální rovnice geodetické křivky :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\alpha}{M} \quad , \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin\alpha}{N\cos\varphi} \quad , \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{N\cot\varphi}$$

- velmi důležité : výchozí vztahy pro řešení hlavních úloh na rotačním elipsoidu

REFERENČNÍ KOULE



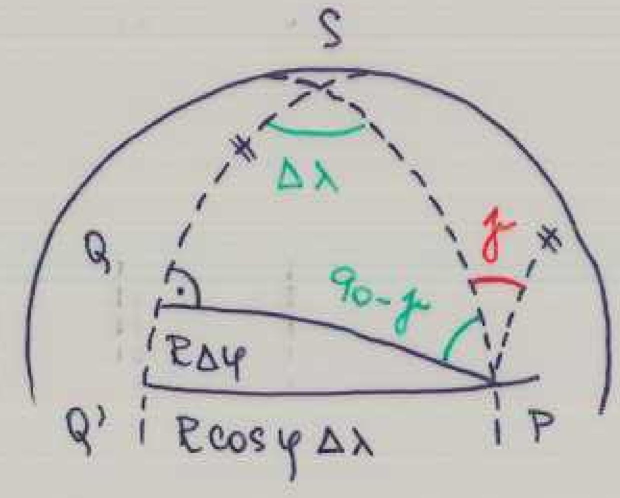
- v mnohých aplikacích je možno nahradit elipsoid koulí :
  - konstantní křivost
    ⇒ jeden poloměr křivosti R
  - všechny normály prochází středem
  - normálové roviny řežou hlavní kružnice

- oblouk hlavní kružnice spojující dva body se nazývá **ortodroma**
  (ortodroma je zároveň geodetická křivka)

- sférické souřadnice :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\varphi\cos\lambda \\ R\cos\varphi\sin\lambda \\ R\sin\varphi \end{bmatrix}$$

MERIDIÁNOVÁ KONVERGENCE NA NÁHRADNÍ KOULI



- sbíhavost poledníků – úhel γ je úhel, který svírá rovnoběžka se základním poledníkem v bodě P
- zároveň odklon kilometrové sítě na mapě od světových stran

- určení meridiánové konvergence z ΔPQS (Neperova pravidla):

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma = \sin \varphi \cdot \tan \Delta\lambda}$$

- meridiánová konvergence se uvažuje v bodech P a Q, nikoli však v bodě Q'

ORTODROMA

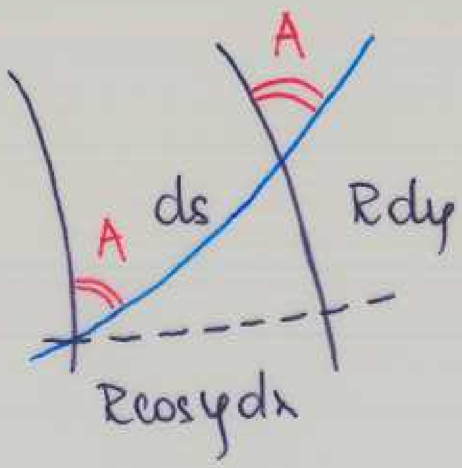
- geodetická křivka na kulové ploše, kratší z oblouků hlavní kružnice spojující dva body
- poledníky jsou hlavní kružnice, rovnoběžky mimo rovník nikoli!
- délka ortodromy = délka hlavní kružnice = $2\pi R$
- ortodromu lze v terénu vytyčit jako polygon o úhlech 180°

LOXODROMA

- křivka protínající všechny poledníky pod konstantním úhlem

$A = 0°$ … poledník

$A = 90°$ … rovnoběžka



$$s = \frac{R}{\cos A}(\varphi_2 - \varphi_1), \quad A \neq 90°$$

ŘEŠENÍ TROJÚHELNÍKŮ NA ROTAČNÍM ELIPSOIDU

- strany trojúhelníku na rotačním elipsoidu : geodetické křivky
- při běžných aplikacích se úlohy řeší přechodem na náhradní kouli tj. aparátem sférické trigonometrie (strany < 50 - 60 km)
- metoda sférického excesu (Legendre) :

součet úhlů ve sférickém trojúhelníku $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon$

sférický exces $\varepsilon = \dfrac{P}{R^2}$, kde P ... obsah Δ

R ... poloměr koule

hodnota ε pro území ČR : $\approx 0{,}005065'' \cdot P$ [km^2]

Legendre : Sférický trojúhelník můžeme řešit jako rovinný o stejných stranách, zmenšíme-li každý jeho úhel o třetinu excesu.

(parafráze)

ZÁKLADNÍ GEODETICKÉ ÚLOHY

- rozeznáváme 2 základní geodetické úlohy (ZGÚ)
- obecná formulace :

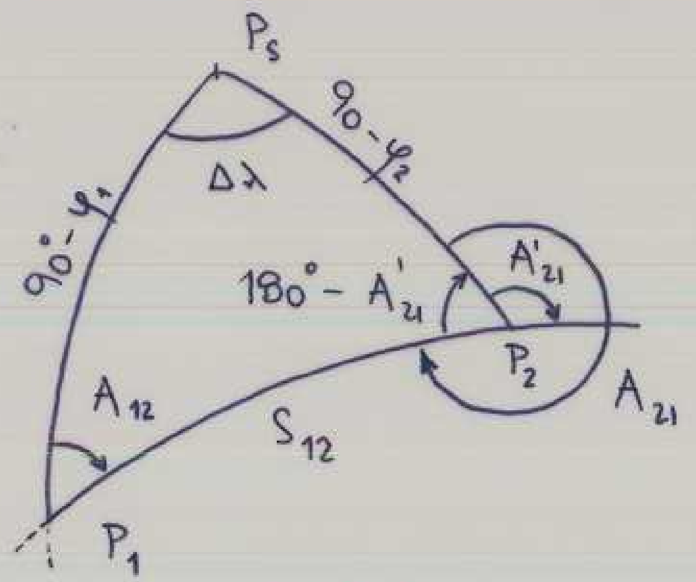
1. ZGÚ : Jsou dány souřadnice bodu P_1 na ploše, azimut α_{12} a délka geodetické křivky s_{12} na bod P_2. Máme vypočítat souřadnice bodu P_2 a azimut α_{21}.

2. ZGÚ : Jsou dány souřadnice bodů P_1 a P_2 na dané ploše. Máme vypočítat délku geodetické křivky s_{12}, a oba azimuty α_{12} a α_{21} v koncových bodech P_1 a P_2.

- řešení v rovině, na kouli, na rotačním elipsoidu

(přenos, délka čáry, aplikace)

ŘEŠENÍ ZÁKLADNÍCH ÚLOH NA KOULI



1. úloha :

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \frac{S_{12}}{R} + \cos \varphi_1 \sin \frac{S_{12}}{R} \cos A_{12}$$

$$\sin \Delta\lambda = \sin \frac{S_{12}}{R} \cdot \frac{\sin A_{12}}{\cos \varphi_2}$$

$$-\sin A_{21} = \cos \varphi_1 \frac{\sin A_{12}}{\cos \varphi_2}$$

2. úloha :

Neperovy analogie

$$\tan \frac{A'_{21} + A_{12}}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} \tan \frac{\Delta\lambda}{2}, \qquad \sin \frac{S_{12}}{R} =$$

$$\tan \frac{A'_{21} - A_{12}}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} \tan \frac{\Delta\lambda}{2}, \qquad = \sin \Delta\lambda \frac{\cos \varphi_2}{\sin A_{12}}$$

$$A_{12} = \frac{A'_{21} + A_{12}}{2} - \frac{A'_{21} - A_{12}}{2}, \quad A_{21} = \frac{A'_{21} + A_{12}}{2} + \frac{A'_{21} - A_{12}}{2} \pm 180^\circ$$

REDUKCE MĚŘENÍ NA ROTAČNÍ ELIPSOID

- pro řešení základních úloh na rotačním elipsoidu musíme redukovat měřené hodnoty na povrchu Země
- redukce měřených azimutů (úhlů) a délek
- redukce se dají rozdělit na dvě skupiny :
    1) geometrické vlivy
    2) vliv tíhového pole
- dříve velmi důležité : relativní určování polohy
- dnes : 3D relativní polohování pomocí GPS

  => redukce na elipsoid není nutná,

  přímé vyrovnání souřadnic z měřených veličin