

5 Geodetické sítě – 2D

5.1 Úvod

Tato 5. kapitola patří plně mezi klasické kapitoly vyšší geodézie. Uvádí ve stručnosti matematickou teorii metod vyrovnání, kterých bylo obvykle používáno v geodézii pro vyrovnání geodetických sítí, řekněme od dob Gaussových. Protože však hlavním úkolem předkládaného textu je podat nejmodernější měřické a výpočetní postupy, včetně metod družicové geodézie, budou uvedeny tyto klasické metody vyšší geodézie jen v nejzákladnějších myšlenkách a postupech.

V naší současné odborné literatuře jsou tyto metody důkladně, včetně příkladů projednávány v [5], [1] a velmi přehledně v [6]. A podle poslední citované práce budeme v následujícím textu postupovat.

Dělení úloh této části vyšší geodézie je možno uskutečnit podle různých aspektů. Domníváme se, že základním dělením je dělení podle měřených veličin v dané síti. Podle toho hovoříme o

- **triangulaci**, jsou-li měřeny směrové veličiny
- **trilateraci**, jsou-li měřeny délkové veličiny
- **kombinovaném** měření, jsou-li měřeny obě tyto veličiny

V případě triangulace a kombinovaného měření rozeznáváme měření - **úhlů**
- **směrů**

Podle velikosti dělíme geodetické sítě na

- **místní,**
- **národní,**
- **mezinárodní,**
- **kontinentální, kap. 7 a 8,**
- **světové, kap. 8.**

V následujícím textu bude postup výkladu dělen podle způsobu vyrovnání na

- **vyrovnání podle podmínkových pozorování, kap. 5.2,**
- **vyrovnání podle zprostředkujících pozorování, kap. 5.3.**

Počty měření budou ve všech případech nadbytečné, aby tak bylo možno přistoupit k vyrovnání MNČ. Význam těchto nadbytečných pozorování je v

- **kontrole,**
- **zvýšení kvality měřického materiálu,**
- **posouzení vhodnosti metod a přístrojů.**

Ještě dříve, před vlastním výpočtem/vyrovnáním, je nutné naměřené veličiny, ať jsou to směry či délky, redukovat na výpočetní plochu. V našem případě bude výpočetní plochou rovina kartografického zobrazení. Může jí však být i plocha elipsoidu, koule a pod. O těchto redukcích, které zaujmají značně rozsáhlé místo v oblasti vyšší geodézie, nebude zde pojednáno. Potřebnému čtenáři doporučujeme výše uvedenou literaturu [5], [1] a [6]. Ještě dodejme, že tyto redukce jsou nejen početně, ale i po teoretické stránce obtížné. Do značné míry jsou redukcemi zbaveny výpočty, které se provádějí v 3D prostoru, viz kap. 6. Rovněž nebude v následujícím textu pojednáno o přenosu chyb, o optimalizaci sítí ap., viz [5], [1] a [6].

5.1.1 Váhy měřených veličin

Již na tomto místě se zmíníme o zavádění vah měřených veličin. Především proto, že budou používány dva druhy těchto veličin (směry a délky) a také proto, že vyjadřování jejich velikostí v různých rozměrových jednotkách, např. v *metrech* či *centimetrech*, přináší zřetelně odlišné výsledky. Tyto rozpory je možno odstranit vhodným zaváděním vah.

Metoda nejmenších čtverců používá podmínky

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i v_i = \min ,$$

pro získání nejpravděpodobnějších veličin. Index $i = 1, \dots, n$ představuje i -té měření, při čemž v souhrnu těchto měření mohou vystupovat, a také vystupují, různé druhy měřených veličin. Váhy p_i můžeme získat různými způsoby. Např. z předchozích měření (z vyrovnání směrů na stanovisku, z průměrné hodnoty měřené vzdálenosti), nebo z předchozích všeobecných zkušeností (střední chyba úhlu v základní síti), či z jiných měřických aspektů (počet měření) ap. Výsledkem těchto předcházejících měření budou tzv. apriorní středních chyby m_i . Platí pak [2, s. 203] $p_i m_i^2 = m_0^2 = k$, z čehož $p_i = \frac{k}{m_i^2}$. Konstantu k volíme tak, aby se všechny váhy p_i pohybovaly kolem 1. Např. podle výrazu

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i^2}{n} ,$$

leč lze ji též určit podle jiných požadavků. Jelikož konstanta k je volitelná, možno ji považovat za číslo nepojmenované a tudíž má váha p_i rozměr $[m_i^{-2}]$. Po jejím dosazení do $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ dostaneme

$$k \sum_{i=1}^n \frac{v_i v_i}{m_i^2} = \min$$

Zavedeme-li, jen formálně, $v'_i = v_i \sqrt{k}/m_i$, platí $\sum_{i=1}^n v'_i v'_i = \min$. Opravy v' jsou tzv. normované opravy a jejich předností je, že jsou bez rozměru, neboť v_i a m_i jsou týchž rozměrů. Tím se i celý postup vyrovnání stává nezávislým na druhu měřených veličin a tedy na volbě rozměrových jednotek. Z toho též vyplývá, že rozměrové jednotky měřené veličiny a její střední chyby musí být vyjádřeny v týchž jednotkách, viz též PŘÍKLAD 15. Číselné ověření je v PŘÍKLADĚ 15.

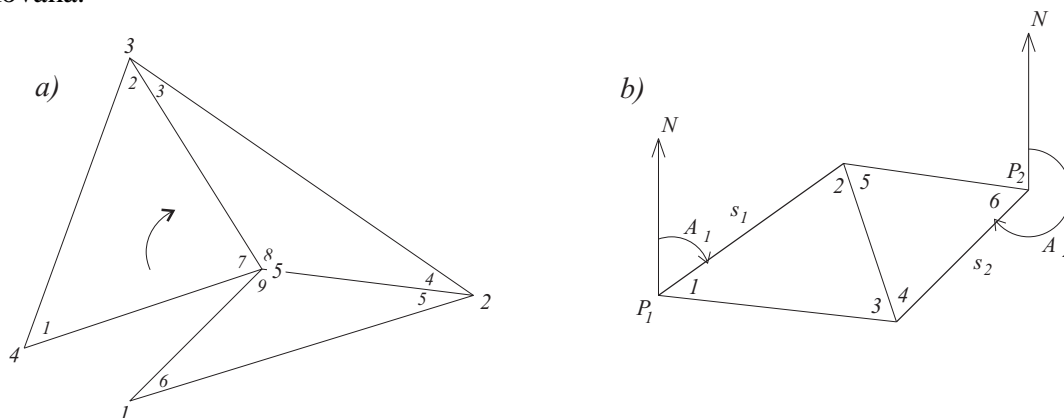
5.2 Vyrovnání geodetických sítí v 2D prostoru pomocí podmínkových měření/pozorování.

Prosíme hned zpočátku: nepřehlédněte, že tato kapitola navazuje na kap. 4.3 a doporučujeme proto, se s ní aspoň dočasně seznámit.

Původní název pro podmínková pozorování zněl závislá pozorování. Ten teď představuje zcela jiný druh vyrovnání, viz část X.

Základním pravidlem podmínkových pozorování je: počet r podmínkových rovnic se musí rovnat počtu r nadbytečných měření, přičemž $r = n -$ počet nutných měření/pozorování, kde n je počet všech pozorování. Sestavené podmínky musí být vyrovnáním splněny.

V případě kap. 5.2 se též tato měření, jakož i tato vyrovnání, označují jako úhlová či korelovaná.



Obr. 5.2.1

5.2.1 Vyrovnání triangulace

Jednotlivé podmínky demonstrujeme na obr. 5.2.1a) a b). Budou platit pro rovinnou síť a pro měřené úhly. Pro měřené směry je postup obdobný.

Trojúhelníková podmínka platí pro každý trojúhelník a podle obr. 5.2.1a) to jsou vztahy

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_7 - 180^\circ &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_8 - 180^\circ &= 0, \\ \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_9 - 180^\circ &= 0,\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

viz též rov. (4.3.1) a (4.3.2). Jejich počet t je roven počtu trojúhelníků.

Uzávěrová (vrcholová) podmínka má tvar

$$\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 - 360^\circ = 0\tag{5.2.2}$$

a jejím smyslem je uzavřít úhly při centrálním bodě na 360° , viz obr. 5.2.1a). Jejich počet c je roven počtu centrálních vrcholů.

Stranová podmínka. Jestliže vyjdeme v obr. 5.2.1a) např. ze strany 4,5 a pomocí obecné sinové věty vyjadřujeme postupně strany ve směru šipky, nedostaneme přesně tutéž hodnotu strany 4,5 ale hodnotu strany 1,5. Proto je nutné zavést podmínku

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \sin \alpha_5 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6 = 0,\tag{5.2.3}$$

kteřou je nutno sestavit a splnit nejen pro každý centrální obrazec, viz např. 5.2.1a), ale i pro každý čtyřúhelník s oběma zaměřenými úhlopříčkami. Jejich počet označme s .

Základnová podmínka vyjadřuje, a to obvykle opět pomocí obecné sinové věty, vztah mezi délkově změřenými stranami (základnami) s_1 a s_2 . Zní

$$s_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_5 - s_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_6 = 0.\tag{5.2.4}$$

Jejich počet je $z - 1$, je-li z počet zaměřených stran (základů) v uvažované síti.

Azimutální (směrníková) podmínka vyjadřuje vztah mezi zaměřenými azimuty A_1 a A_2 . V obecném tvaru zní

$$\sum \alpha_i + (A_1 - A_2) \pm i \cdot 180^\circ = 0,\tag{5.2.5}$$

viz obr. 5.2.1b). Zde Σ je součet příslušných vodorovných úhlů od A_1 do A_2 . Počet těchto podmínkových rovnic je $a - 1$, jestliže a je počet zaměřených azimutů.

Souřadnicová podmínka vystupuje tehdy, jsou-li v síti aspoň dva body P_1 a P_2 o známých rovinných souřadnicích x_1, y_1 a x_2, y_2 a nemají-li být tyto souřadnice vyrovnáním pozměněny. Pak má platit

$$x_2 = x_1 + \sum_i s_i \cos A_i, \quad y_2 = y_1 + \sum_i s_i \sin A_i. \quad (5.2.6)$$

Jejich počet je $2k - 2$, je-li k počet výše uvedených bodů.

Jak bylo již uvedeno v kap. 4.3, je nutné nyní do uvedených rov. (5.2.1) až (5.2.6) dosadit naměřené veličiny l a jejich opravy v (indexy jsou vynechány) a linearizací těchto rovnic přejít k přetvořeným podmínkovým rovnicím typu rov. (4.3.2).

V případě *trojúhelníkových podmínkových rovnic* (5.2.1) byla tato úprava již naznačena v rov. (4.3.1). Pro první rov. (5.2.1) zní

$$v_1 + v_2 + v_7 + U_{127} = 0,$$

kde $U_{127} = l_1 + l_2 + l_7 - 180^\circ$ je uzávěr.

V případě *uzávěrových (vrcholových) podmínkových rovnic* (5.2.2) se rovněž jedná o již linearizované rovnice, takže jejich přetvořené podmínkové rovnice mají tvar

$$v_7 + v_8 + v_9 + U_{789} = 0,$$

kde $U_{789} = l_7 + l_8 + l_9 - 360^\circ$ je uzávěr.

V případě zbývajících podmínkových rov. (5.2.3) až (5.2.6) je nutno provést příslušné parciální derivace těchto rovnic podle měřených veličin a rovněž i definovat potřebné uzávěry. Tak bude učiněno až v konkrétních číselných příkladech v dalším textu.

Po vytvoření potřebných přetvořených podmínkových rovnic sestavíme matici \mathbf{B} , dále vypočteme potřebné uzávěry a sestavíme pomocí nich vektor \mathbf{U} , viz rov. (4.3.3). Poté následuje vlastní vyrovnání MNC podle kap. 4.3.1 resp. 4.3.2.

Problematika velmi obdobná se týká vyrovnání, v němž nevystupují úhly ale směry. Podobně je tomu, neprovádí-li se vyrovnání v rovině, ale na kouli či elipsoidu, viz [5], [1] a [6].

Poznámka k sestavení potřebného počtu podmínkových rovnic. V učebnici [5] je uvedena tato, praxí ověřená rada.

Při vyrovnávání složitých sítí, jaké se naskýtají například při vytyčování dlouhých os tunelových, se musí při sestavování rovnic postupovat velmi pozorně. Sestavují-li se rovnice trojúhelníkové, doporučuje se nakreslit náčrtek sítě tak zjednodušený, že se nejdříve vypustí všechny přebytečné úhlopříčny. Tímto zjednodušením dostaneme obrazec představující souvislou skupinu jednoduchých trojúhelníků. Podle tohoto náčrtku napíšeme pro všechny trojúhelníky podmínkové rovnice. Skončivše tuto práci, přikresluje postupně další úhlopříčny a pro každou píšeme ihned příslušnou rovnici.

Sestavování závěrových rovnic podle náčrtku nepůsobí obtíží.

Při sestavování rovnic stranových vyjdeme nejlépe opět ze zjednodušené sítě (vynecháme křížující úhlopříčny) a sestavíme stranové rovnice pro všechny body ležící uvnitř sítě, aplikující při tom obecnou poučku sinovou pro ony body jako póly. Potom síť doplňujeme dalšími úhlopříčkami, přičemž pro každou nově zakreslenou úhlopříčku ihned sestavíme jednu rovnici stranovou. Za pól lze volit kterýkoli vrchol příslušného čtyřúhelníka nebo průsečík obou uvažovaných úhlopříčen.

PŘÍKLAD 14

Vyrovnání rovinné trojúhelníkové sítě podle podmínkových pozorování/měření.

Použijeme seminární úlohu [4]. Mějme rovinnou trojúhelníkovou síť, obr. 5.2.2, v které byly měřeny všechny označené úhly l_i a délka jedné, libovolně zvolené výchozí strany. Opravy úhlů jsou v_i . Podle rov. (4.3.1), v které symboly α nahradíme symboly l , viz též rov. (5.2.1), sestavíme potřebné podmínkové rovnice.

Trojúhelníkové přetvořené podmínkové rovnice jsou

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_8 + U_1 &= 0 \\v_{1'} + v_{8'} + v_9 + U_2 &= 0 \\v_{8''} + v_{9'} + v_{10} + U_3 &= 0 \\v_{1''} + v_4 + v_{9''} + U_4 &= 0 \\v_{1'''} + v_{2'} + v_{4'} + U_5 &= 0\end{aligned}\tag{5.2.7}$$

kde

$$\begin{aligned}U_1 &= l_1 + l_2 + l_8 - 180^\circ \\U_2 &= l_{1'} + l_{8'} + l_9 - 180^\circ \\U_3 &= l_{8''} + l_{9'} + l_{10} - 180^\circ \\U_4 &= l_{1''} + l_4 + l_{9''} - 180^\circ \\U_5 &= l_{1'''} + l_{2'} + l_{4'} - 180^\circ\end{aligned}\tag{5.2.8}$$

Vrcholová přetvořená podmínková rovnice

$$v_1 + v_{1'} + v_{1''} + v_{1'''} + U_6 = 0$$

kde

$$U_6 = l_1 + l_{1'} + l_{1''} + l_{1'''} - 360^\circ\tag{5.2.9}$$

Stranová podmínková rovnice

$$\sin \bar{l}_2 \cdot \sin \bar{l}_{4'} \cdot \sin \bar{l}_{8'} \cdot \sin \bar{l}_{9''} - \sin \bar{l}_2 \cdot \sin \bar{l}_4 \cdot \sin \bar{l}_8 \cdot \sin \bar{l}_9 = 0$$

byla sestavena podle rozšířené sinové věty a je nelineární. Proto je nutno ji linearizovat. Stranová podmínková rovnice přetvořená pak zní

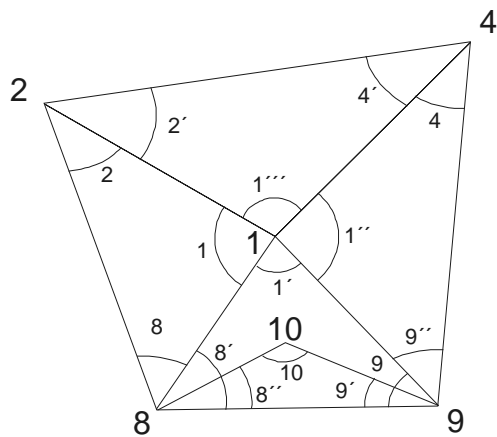
$$c_2 v_2 + c_{2'} v_{2'} + c_4 v_4 + c_{4'} v_{4'} + c_8 v_8 + c_{8'} v_{8'} + c_9 v_9 + c_{9''} v_{9''} + U_7 = 0\tag{5.2.10}$$

$$\begin{aligned}c_2 &= \cos l_2 \sin l_{4'} \sin l_{8'} \sin l_{9''}, & c_8 &= -\sin l_{2'} \sin l_4 \cos l_8 \sin l_9, \\c_{2'} &= -\cos l_2 \sin l_4 \sin l_8 \sin l_9, & c_{8'} &= \sin l_2 \sin l_{4'} \cos l_{8'} \sin l_{9''}, \\c_4 &= -\sin l_{2'} \cos l_4 \sin l_8 \sin l_9, & c_9 &= -\sin l_{2'} \sin l_4 \sin l_8 \cos l_9, \\c_{4'} &= \sin l_2 \cos l_{4'} \sin l_{8'} \sin l_{9''}, & c_{9''} &= \sin l_2 \sin l_{4'} \sin l_{8'} \cos l_{9''},\end{aligned}\tag{5.2.11}$$

$$U_7 = \sin l_2 \sin l_{4'} \sin l_{8'} \sin l_{9''} - \sin l_{2'} \sin l_4 \sin l_8 \cos l_9.$$

Uzávěry, včetně uzávěru U_7 , a tím i opravy jsou vyjádřeny v šedesátinných vteřinách. Koeficienty při opravách jsou bez rozměru. Matice \mathbf{B} v rov. (4.3.6) má pak tvar, pro $n = 15$ a $r = 7$.

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_{2'} & c_4 & c_{4'} & c_8 & c_{8'} & 0 & c_9 & 0 & c_{9'} & 0 \end{pmatrix}$$



Obr. 5.2.1 Rovinná trojúhelníková síť

Číselné hodnoty koeficientů c_i jsou v posledním řádku následující matice \mathbf{A} .

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,294 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,320 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,156 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,151 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,182 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,187 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,354 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,294 & -0,320 & -0,156 & 0,151 & -0,182 & 0,015 & 0 & -0,187 & 0 & 0,354 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -\mathbf{U}^T \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2,1'' \ 4,5 \ -7,9 \ 0,5 \ -3,8 \ -1,7 \ 0,7)$$

PŘÍMÉ ŘEŠENÍ PODMÍNKOVÝCH POZOROVÁNÍ – Odst. 4.3.1

Jde o řešení rov. (4.3.7), v které je váhová matice \mathbf{P} rovna jednotkové o rozměru 15x15. Zavedme dále do rov. (4.3.8) označení \mathbf{A} a \mathbf{L} , jejichž významy jsou uvedeny výše. Výpočet

oprav \mathbf{v} a korelát \mathbf{k} se uskuteční společně z výrazu $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}$. Jsou

$$\underline{\mathbf{v}}_{15 \times 1}^T = (-1,1'' \ 1,3 \ -0,3 \ -1,5 \ 0,0 \ -1,7 \ -0,1 \ -0,7 \ -1,0 \ 1,8 \ -2,6 \ 1,4 \ -2,6 \ 1,0 \ -2,6)$$

$$\underline{\mathbf{k}}_{7 \times 1}^T = (0,6 \ -1,798 \ 2,633 \ -0,204 \ 0,97 \ 0,53 \ -2,122)$$

Střední chyba jednotková

$$m_0 = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v} / 7} = 2,28$$

Střední chyby vyrovnaných úhlů [“] a korelát [0], viz rov. (4.3.9) pro $i=1, \dots, 15$ a (4.3.10) pro $i=16, \dots, 22$ jsou

$$\mathbf{m}_{ll}^T = (1,6 \ 1,6 \ 1,6 \ 1,6 \ 1,5 \ 1,5 \ 1,6 \ 1,6 \ 1,6 \ 1,8 \ 1,9 \ 1,7 \ 1,9 \ 1,5 \ 1,9)$$

$$\mathbf{m}_{kk}^T = (1,4 \ 1,4 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,4 \ 1,4 \ 3,6)$$

POSTUPNÉ ŘEŠENÍ PODMÍNKOVÝCH POZOROVÁNÍ – Odst. 4.3.2

Podle rov. (4.3.13) je

$$\underline{\mathbf{N}}_{7 \times 7} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,112 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,172 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0,198 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -0,169 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0,112 & -0,172 & 0 & 0,198 & -0,169 & 0 & 0,430 \end{pmatrix}$$

Vektor uzávěrů je číselně určen a činí

$$\underline{\mathbf{U}}_{7 \times 1}^T = (2,090 \ -4,500 \ 7,900 \ -0,500 \ 3,798 \ 1,689 \ -0,738) \text{ , [“]}$$

Výpočet korelát z rov. (4.3.14) je pak

$$\underline{\mathbf{k}}_{7 \times 1}^T = (\mathbf{N}^{-1} \ \mathbf{U})^T = (0,600 \ -1,798 \ 2,633 \ -0,204 \ 0,970 \ 0,530 \ -2,122) \text{ , [0]}$$

Výpočet oprav z rov. (4.3.11)

$$\underline{\mathbf{v}}_{15 \times 1} = (-1,1'' \ 1,3 \ -0,3 \ -1,5 \ 0,0 \ -1,7 \ -0,1 \ -0,7 \ -1,0 \ 1,8 \ -2,6 \ 1,4 \ -2,6 \ 1,0 \ -2,6)$$

Střední chyba jednotková, viz kap. 4.3.1

$$m_0 = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v} / 7} = 2,28$$

Střední chyby korelát, rov. (4.3.16),

$$\mathbf{m}_{kk}^T = (1,4 \ 1,4 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,4 \ 1,4 \ 3,6)$$

Výpočet m_{ll} viz přímé řešení nebo [2, str. 201]. Shoda mezi přímým a postupným řešením je bezvadná. Čímž by měl být posvěcen netradiční postup přímého řešení. Výsledky vyrovnaných hodnot \mathbf{v} a \mathbf{k} se shodují úplně.

Další výpočetní postup je společný pro obě řešení, viz odst. 4.3.2. Nejprve 1. kontrola dosazením oprav do přetvořených podmínkových rov. (5.2.7), první rov. (5.2.9) a rov. (5.2.10). Odchyly dosahují nejvýše pouze $\pm 0,001$. Kontrola 2. pozůstává ve výpočtu vyrovnaných úhlů $\bar{l}_i = l_i + v_i$, viz tab. 5.2.1, a ve výpočtu nových uzávěrů určených pomocí těchto vyrovnaných hodnot.

Tab. 5.2.1 Vypočtené vyrovnané úhly $\bar{l}_i = l_i + v_i$

Úhel	hodnota
1	103°57'36.960''
1'	51° 3'35.268''
1''	104° 8'33.537''
1'''	100°50'14.198''
2	31°23'17.625''
2'	29°17'56.151''
4	48°57'48.772''
4'	49°51'49.651''
8	44°39' 5.415''
8'	85° 9'54.231''
8''	14°28'48.767''
9	43°46'30.501''
9'	47°41'33.667''
9''	26°53'37.654''
10	117°49'37.567''

Nové uzávěry, tj. vypočtené po vyrovnaní dosazením hodnot z tab. 5.2.1 do rov. (5.2.8), druhé rov. (5.2.9) a do rov. (5.2.10), jsou

$$U_1 = 1,6 \cdot 10^{-4} \quad U_2 = -9,3 \cdot 10^{-4} \quad U_3 = -1,7 \cdot 10^{-6} \quad U_4 = -2,6 \cdot 10^{-11}$$

$$U_5 = 4,0 \cdot 10^{-4} \quad U_6 = 7,3 \cdot 10^{-4} \quad U_7 = -4,6 \cdot 10^{-4}$$

a opět v jednotkách šedesátinné vteřiny.

5.2.2 Vyrovnaní trilaterace

Základní postup je opět shodný s postupem předchozím. Poněkud odlišný je způsob sestavování podmínkových rovnic. Odlišnost pozůstává v tom, že podmínky mezi úhly je třeba vyjádřit pomocí měřených délek stran. K nim přistupují ovšem další podmínky, jež vyplynou z naměřených délek. Pak teprve naměřeným veličinám, tj. délkám stran, připíšeme opravy a takto získané rovnice až nyní linearizujeme. Vyrovnaní je možno provést v rovině, např. v rovině kartografického zobrazení, na kouli, či na elipsoidu. Trilaterační podmínkové rovnice pro různé druhy geometrických obrazců najde čtenář v [6, s. 245 až 254]. Následující postup v kap. 5.2.3 zahrnuje v sobě vyrovnaní trilaterační jako zvláštní případ.

5.2.3 Vyrovnaní měření kombinovaných

O zavádění vah bylo již pojednáno v kap. 5.1.1.

Přirozeně, že i zde platí nutnost sestavení podmínkové rovnice pro každé nadbytečné měření. Pro jednoduchost, ale i pro zvýšení přehlednosti použijeme příkladu v [6, s. 260], který číselně vyrovnáme, a to nejprve podle pozorování podmínkových (PŘÍKLAD 15). Rovněž bude určen potřebný počet podmínkových rovnic a další charakteristiky.

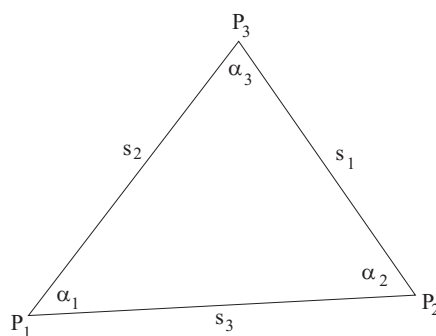
Jistě by bylo možné postupovat obdobně jako v kap. 5.2.1 při vyrovnaní triangulace, totiž vypisovat jednotlivé typy podmínkových rovnic. Bylo by to vlastně opakování rov. (5.2.1) až (5.2.6), k nimž by přibyly další podmínky vystihující vzájemné závislosti mezi naměřenými délkami stran studované sítě. Zdá se však, že možnosti konfigurací měřených stran jsou značně bohaté a jejich uspořádání do určitého schématu obtížné a možná i

samoučelné. Schéma pro schéma. Snad vhodnější bude odvozování použitých podmínkových rovnic samostatně příklad od příkladu, jak bude učiněno i v následujícím případě.

PŘÍKLAD 15

Vyrovnaní rovinného trojúhelníka podle podmínkových měření/pozorování, jsou-li měřeny úhly a délky stran – vyrovnaní měření kombinovaných.

Protože základním obrazcem geodetické sítě v rovině je rovinný trojúhelník, bude naše následující demonstrace uskutečněna s rovinným trojúhelníkem $P_1P_2P_3$, v němž jsou měřeny všechny úhly a všechny délky stran, viz obr. 5.2.3. Veličiny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, s_1, s_2, s_3$ budeme považovat za dané a bezvadné. Obecné řešení stejné úlohy ve 3D prostoru je v kap. 6.3.



Obr. 5.2.1 Rovinný trojúhelník

Protože trojúhelník $P_1P_2P_3$ je dán třemi nezávislými veličinami a dáno jich je šest, je nutné sestavit tři podmínkové rovnice. Bude to jedna rovnice trojúhelníková a dvě rovnice s užitím rovinných sinových vět. Jsou

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 180^\circ &= 0, \\ s_1 \sin \alpha_2 - s_2 \sin \alpha_1 &= 0, \\ s_1 \sin \alpha_3 - s_3 \sin \alpha_1 &= 0.\end{aligned}$$

Podle obvyklých zvyklostí vyrovnávacího počtu – MNČ nahradíme bezvadné hodnoty naměřenými l_1, l_2, l_3 a l_4, l_5, l_6 a jejich opravami v_1, v_2, \dots, v_6 . Získáme rovnice

$$\begin{aligned}l_1 + v_1 + l_2 + v_2 + l_3 + v_3 - 180^\circ &= 0, \\ (l_4 + v_4) \sin(l_2 + v_2) - (l_5 + v_5) \sin(l_1 + v_1) &= 0, \\ (l_4 + v_4) \sin(l_3 + v_3) - (l_6 + v_6) \sin(l_1 + v_1) &= 0.\end{aligned}\tag{5.2.12}$$

Abychom vytvořili přetvořené podmínkové rovnice, viz rov. (4.3.1), je nutno rov. (5.2.12) linearizovat. Stačí rozvést druhou a třetí s ponecháním malých veličin prvního řádu. Dostáváme po malých úpravách vztahy

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + U_1 &= 0, \\ -v_1 l_5 \cos l_1 + v_2 l_4 \cos l_2 + v_4 \sin l_2 - v_5 \sin l_1 + U_2 &= 0, \\ -v_1 l_6 \cos l_1 + v_3 l_4 \cos l_3 + v_4 \sin l_3 - v_6 \sin l_1 + U_3 &= 0,\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

kde uzávěry jsou:

$$\begin{aligned}U_1 &= l_1 + l_2 + l_3 - 180^\circ, \\ U_2 &= l_4 \sin l_2 - l_5 \sin l_1, \\ U_3 &= l_4 \sin l_3 - l_6 \sin l_1.\end{aligned}\tag{5.2.14}$$

Počet podmínkových rovnic $r = 3$ a počet měřených veličin $n = 6$. Rozepíšme matici \mathbf{B} a vektor \mathbf{U} , viz rov. (4.3.3) a (4.3.2). S uvážením rov. (5.2.13) a (5.2.14) dostáváme

$$\mathbf{B}_{3 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_5 \cos l_1 & l_4 \cos l_2 & 0 & \sin l_2 & -\sin l_1 & 0 \\ -l_6 \cos l_1 & 0 & l_4 \cos l_3 & \sin l_3 & 0 & -\sin l_1 \end{pmatrix} \quad (5.2.15)$$

$$\mathbf{U}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

Abychom vyhověli požadavkům v kap. 5.1.1 o zavádění vah, je nutno uvážit střední chyby naměřených veličin.

Případ 1) Podle [6, s. 260] platí pro úhly $m_{1,2,3} = \pm 1''$ a pro délky $m_{4,5,6} = \pm 1$ dm. Podle kap. 5.1.1 zavedeme dále konstantu $k = 1$, takže váhy všech měřených veličin jsou 1. Rozměry středních chyb jsou '' a dm, takže váhy jsou bezrozměrné. Pro uvedený příklad použijeme

$$\begin{aligned} l_1 &= 63^\circ 19' 25,20'' & l_4 &= 287\,356,6 \text{ dm} \\ l_2 &= 75^\circ 13' 21,10'' & l_5 &= 310\,948,9 \text{ dm} \\ l_3 &= 41^\circ 27' 12,40'' & l_6 &= 212\,895,5 \text{ dm} \end{aligned}$$

Pomocí nich a rov. (5.2.15) naplníme rovnice v kap. 4.3.1. Pro výrazy v rov. (4.3.7) dostáváme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -0,677 & -0,463 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0,355 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1,044 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0,967 & 0,662 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & -0,894 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -0,894 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ -0,677 & 0,355 & 0 & 0,967 & -0,894 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ -0,463 & 0 & 1,044 & 0,662 & 0 & -0,894 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{U}^T = (-1,3'' \quad 1,384 \text{ dm} \quad -0,938 \text{ dm})$, takže, viz rov. (4.3.8), výsledky jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T &= (0,491'' \quad -0,069'' \quad 0,878'' \quad -0,382 \text{ dm} \quad 0,736 \text{ dm} \quad -0,560 \text{ dm}) \\ \mathbf{k}^T &= (-0,224 \quad 0,824 \quad -0,626) \end{aligned}$$

Což je v souladu s [6, s. 262].

Případ 2) Druhá varianta výpočtu, ověřující kap. 5.1.1 o zavádění vah, vyjadřovala opětně úhly ve '', ale délky v metrech. Střední chyby, co do velikosti, zůstaly stejné, takže $m_{1,2,3} = \pm 1''$, ale $m_{4,5,6} = \pm 0,1$ m! Rovněž konstanta $k = 1$, takže váhy úhlů $p_{1,2,3} = 1$, ale délek $p_{4,5,6} = 100$ a opět byly bezrozměrné.

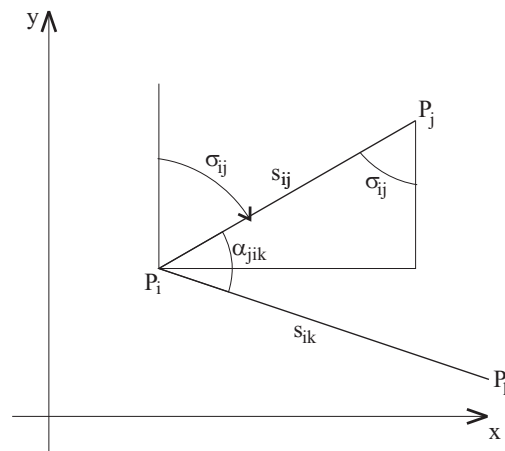
Výpočet prošel stejným algoritmem a dal opět výsledky výše uvedené.

5.3 Vyrovnání geodetických sítí ve 2D prostoru pomocí zprostředkujících pozorování

Rovněž i zde upozorňujeme, že tato kapitola navazuje na kap. 4.4 a doporučujeme svědomitému čtenáři jí pročíst. Základní, a pro nás zde výchozí, jsou vztahy

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1},$$

viz rov. (4.4.2), v níž $d\mathbf{x}$ přešlo v \mathbf{x} . Vektor \mathbf{x} je vektor neznámých, kterými budou opravy dx_i , dy_i , do_i přibližných hodnot souřadnic x_0 , y_0 bodů P_i sítě a ev. i orientačních posunů o_i na bodech P_i , pokud půjde o vyrovnání směrů. Pokud půjde o vyrovnání úhlů α_i , pak odpadají orientační posuny a tudíž i jejich opravy. Měřenými veličinami by tedy opět byly úhly α_i a délky stran s_i . A tento případ si zvolíme k demonstrování potřebných zprostředkujících rovnic oprav a k vyrovnání tohoto typu geodetických sítí podle zprostředkujících měření/pozorování MNČ. Je též nazýváno vyrovnáním souřadnicovým.



Obr. 5.3.1

Zprostředkující rovnice oprav pro měřenou délku strany P_iP_j , obr. 5.3.1. Necht' s_{ij} , s_{0ij} , $l_{s_{ij}}$ a $v_{s_{ij}}$ představuje bezchybnou (správnou) délku, přibližně známou, naměřenou a její opravu. Pak platí, že

$$s_{ij} = s_{0ij} + ds_{ij} = l_{s_{ij}} + v_{s_{ij}}, \quad (5.3.1)$$

kde ds_{ij} je totální diferenciál funkce

$$s_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (5.3.2)$$

a zní

$$ds_{ij} = \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{ij}} (dx_j - dx_i) + \frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{ij}} (dy_j - dy_i), \quad (5.3.3)$$

kde index 0 značí jejich přibližně známé hodnoty. Rov. (5.3.3) dosadíme do rov. (5.3.1), upravíme a dostaneme

$$-\frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{ij}} dx_i + \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{ij}} dx_j - \frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{ij}} dy_i + \frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{ij}} dy_j + L_{s_{ij}} = v_{s_{ij}}, \quad (5.3.4)$$

*) Připojením $(z_j - z_i)^2$ vstupujeme do 3D prostoru

kde $L_{s_{ij}} = s_{0ij} - l_{s_{ij}}$. Délku s_{0ij} vypočteme z rov. (5.3.2) dosazením přibližně známých hodnot x_{0i}, \dots, y_{0i} .

Zprostředkující rovnice oprav pro směr P_iP_j , obr. 5.3.1. Necht' σ_{ij} , σ_{0ij} , $l_{\sigma_{ij}}$, $\Delta\sigma_{ij}$ a $v_{\sigma_{ij}}$ představuje správný směrnik, přibližný, naměřený, orientační posun a jeho náhodnou opravu. Pak platí, že

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0ij} + d\sigma_{ij} = l_{\sigma_{ij}} + \Delta\sigma_{ij} + v_{\sigma_{ij}}, \quad (5.3.5)$$

kde $d\sigma_{ij}$ je totální diferenciál funkce

$$\sigma_{ij} = \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}, \quad (5.3.6)$$

a zní

$$d\sigma_{ij} = -\frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{0ij}^2} dx_i + \frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{0ij}^2} dx_j + \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{0ij}^2} dy_i - \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{0ij}^2} dy_j. \quad (5.3.7)$$

Rov. (5.3.7) dosadíme do rov. (5.3.5), upravíme a dostaneme

$$\begin{aligned} -\frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{0ij}^2} dx_i + \frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{0ij}^2} dx_j + \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{0ij}^2} dy_i - \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{0ij}^2} dy_j - \\ - \Delta\sigma_{ij} + L_{\sigma_{ij}} = v_{\sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

kde prostý člen $L_{\sigma_{ij}} = \sigma_{0ij} - l_{\sigma_{ij}}$. Směrnik σ_{0ij} vyjádříme z rov. (5.3.6) dosazením přibližně známých hodnot x_{0i}, \dots, y_{0j} . Stejně tak se sestaví rovnice oprav pro opravy směru P_j, P_i a směry zbývající.

Zprostředkující rovnice pro úhel $P_jP_iP_k$, obr. 5.3.1. Podle rov. (5.3.8) získáme zprostředkující rovnice oprav i pro spojnici P_iP_k , když v rov. (5.3.8) zaměníme index j indexem k . Má tvar

$$\begin{aligned} -\frac{y_{0k} - y_{0i}}{s_{0ik}^2} dx_i + \frac{y_{0k} - y_{0i}}{s_{0ik}^2} dx_k + \frac{x_{0k} - x_{0i}}{s_{0ik}^2} dy_i - \frac{x_{0k} - x_{0i}}{s_{0ik}^2} dy_k - \\ - \Delta\sigma_{ik} + L_{\sigma_{ik}} = v_{\sigma_{ik}} \end{aligned} \quad (5.3.8')$$

kde $L_{\sigma_{ik}} = \sigma_{0ik} - l_{\sigma_{ik}}$. Od rov. (5.3.8') odečteme rov. (5.3.8) a dostaneme zprostředkující linearizovanou rovnici oprav pro úhel α_{ijk} , viz obr. 5.3.1. Zní

$$\begin{aligned} \left(-\frac{y_{0k} - y_{0i}}{s_{0ik}^2} + \frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{0ij}^2} \right) dx_i - \frac{y_{0j} - y_{0i}}{s_{0ik}^2} dx_j + \frac{y_{0k} - y_{0i}}{s_{0ij}^2} dx_k + \\ + \left(\frac{x_{0k} - x_{0i}}{s_{0ik}^2} - \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{0ij}^2} \right) dy_i + \frac{x_{0j} - x_{0i}}{s_{0ik}^2} dy_j - \frac{x_{0k} - x_{0i}}{s_{0ij}^2} dy_k + \\ + L_{\alpha_{ijk}} = v_{\alpha_{ijk}} \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

kde $L_{\alpha_{ijk}} = L_{\sigma_{ik}} - L_{\sigma_{ij}} = \sigma_{0ik} - l_{\sigma_{ik}} - \sigma_{0ij} + l_{\sigma_{ij}} = \alpha_{0ijk} - l_{\alpha_{ijk}}$, $\alpha_{0ijk} = \sigma_{0ik} - \sigma_{0ij}$, se zjistí dosazením přibližně známých souřadnic $x_{0i}, y_{0i}, x_{0j}, y_{0j}, x_{0k}, y_{0k}$ do rov. (5.3.6) a $v_{\alpha_{ijk}} = v_{\sigma_{ik}} - v_{\sigma_{ij}}$ je náhodná oprava naměřeného úhlu $l_{\alpha_{ijk}}$.

Rov. (5.3.4), (5.3.8) resp. (5.3.8') a (5.3.9) jsou základními rovnicemi pro vyrovnání rovinných geodetických sítí podle zprostředkujících měření/pozorování, jsou-li měřeny úhly a délky stran nebo směry/azimuty a délky stran.

Toto vyrovnání se též nazývá souřadnicové vyrovnání.

Při použití předchozích rovnic je nutno věnovat zvýšenou pozornost zaváděným jednotkám. Ve tvaru předchozích rovnic jsou délky vyjádřeny v délkových jednotkách, úhly a směry v radiánech. Chceme-li je mít např. ve stupních, je třeba je vynásobit $\frac{\pi}{180^\circ}$ atp.

Obecné řešení této úlohy ve 3D prostoru je v kap. 6.3.

LITERATURA:

- [1] Böhm J., Radouch V., Hampacher M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. Vydal Geodetický a kartografický podnik, Praha 1990.
- [2] Böhm J., Hora L., Kolenatý E.: Vyšší geodézie. Vydavatelství ČVUT, Praha 1979.
- [3] Kabeláč J.: Geodetické metody vyrovnání – metoda nejmenších čtverců. ZČU, Plzeň 2004.
- [4] Kesl M.: Podmínková pozorování. Seminární úloha. ZČU, Plzeň 2004.
- [5] Ryšavý J.: Vyšší geodesie. Nakladatelství ČMT, Praha 1947.
- [6] Vykutíl J.: Vyšší geodézie. Vydavatelství Kartografie, Praha 1982.

