Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Semestrální práce

z předmětu APA

Automatizované generování vrstvenic nad nepravidelnou trojúhelníkovou sítí (TIN)

Plzeň, 2007 Josef Bezděk

Abstrakt

Práce popisuje možné způsoby generování izolinií a s tím související problémy. První část popisuje tvorbu a optimalizací digitálního modelu reliéfu (DMR). V další části se rozebírá odlišnost generování izolinií na polyedrickém a plátovém digitálním modelu. Také jsou ukázány tři algoritmy pro extrahování vrstevnic.

Klíčová slova

Delaunay, Delaunayova triangulace, vrstevnice, izolinie, izohypsa

Obsah

1 Úvod

Extrahování izolinií z nepravidelné trojúhelníkové sítě je jedna ze základních a důležitých funkcionalit aplikací GIS. Přesto tyto úlohy, až na výjimky, jsou řešeny převážně komerčním GIS software.
Cílem této práce je vytvořit jednoduchý obecný úvod o této problematice, který bude dobrým základem pro budoucí diplomovou práci. V diplomové práci by měl vzniknout zasuvný modul do open source software uDig, který bude generovat izolinie.

2 Základní definice

K tomu, abychom mohli začít generovat izolinie z digitálního modelu reliéfu (DMR), je potřeba nejdříve objasnit několik základních pojmů.

Izolinie (*z řeckého isos - stejně*) jsou druhem liniové mapové značky nebo prvkem některých dalších druhů diagramů. Jsou to čáry na mapě nebo v grafu, které spojují místa se stejnými hodnotami dané fyzikální, sociometrické nebo jiné veličiny. Izolinie se nemohou křížit a jejich vzdálenosti jsou nepřímo úměrné gradientu daného prvku. Nejznámějším typem izolinie je vrstevnice. [wiki]

Vrstevnice (*izohypsa*) je křivka, která na mapě či v terénu spojuje body se stejnou, předem určenou nadmořskou výškou. Tato křivka je půdorysným obrazem průniku hladinové plochy, čili vodorovné roviny. Pro vyhotovení vrstevnicové mapy jsou vrstevnice voleny s pravidelným výškovým rozdílem – ekvidistancí (*základním intervalem vrstevnic*). Ten bývá uveden v legendě. Pro terén pod vodou se používají tzv. hloubnice (*izobáty*). [wiki]

Digitální model reliéfu DMR je dle slovníku geodetického a kartografického názvosloví, soubor číselných informací o terénu, doplněný pravidly na jejich používaní.
DMR je tedy tvořen množinou bodů, které vhodně reprezentují danou lokalitu. Každý polohově určený bod má přiřazenou veličinu, která je definována matematickou funkcí $Z = F(X,Y)$. Tato veličina může být tlak, srážky vody, teplota a další. Co tedy bude hodnata Z reprezentovat, nijak neovlivňuje vlastní výpočet izolinií.
Celkově popsat plochu terénu je problematické, proto ji rozdělíme na dílčí plochy tak, aby hrany jednotlivých ploch vystihovaly singularity terénu.
Z hlediska systemizace je dle [Cermak02] možné rozdělit DMR na:

rastrové - maticově rozdělí plochu na pravidelné buňky, kde velikost buňky odpovídá velikosti jednoho pixelu rastru.

polyedrické - využívají dělení plochy na nepravidelné, různě veliké plošky, obvykle trojúhelníkového tvaru. Polyedrický model předpokládá, že na plošce trojúhelníku se používá lineární interpolace. Může se tedy říci, že model má tyto vlastnosti:

- reliéf je reprezentován spojitým povrchem, složených s dílčích trojúhelníkových ploch
- plocha trojúhelníku je rovina daná třemi vrcholy trojúhelníku
- na hranách trojúhelníku je povrch spojitý, ale není hladký. Dochází zde k lomu izolinie

Jsme proto schopni vypočítat výšku v jakémkoliv bodu uvnitř trojúhelníku. Vyjdeme z rovnice roviny:

$$\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0;}$$

kde A,B,C,D jsou koeficienty rovnice roviny, a x,y,z jsou souřadnice vrcholů trojúhelníku. Dále můžeme tedy psát:

$$\mathbf{(A/D)x_i + (B/D)y_i + (C/D)z_i = -1;}$$

kde i = 1,2,3. Pak použitím Cramerova pravidla dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{y_1 (z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)} \\
\mathbf{B} &= \mathbf{z_1 (x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)} \\
\mathbf{C} &= \mathbf{x_1 (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)} \\
\mathbf{D} &= \mathbf{-x_1 (y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_3z_1 - y_1z_3) - x_3 (y_1z_2 - y_2z_1)}
\end{aligned}$$

plátové - využívají dělení plochy na nepravidelné, různě veliké plošky, obvykle trojúhelníkového tvaru. Na dělících ploškách se používají nelineární interpolace. [Cermak02]

3 Vytvoření DMR

Velmi důležitým krokem pro vygenerování vrstevnic je vytvoření vhodného digitalního modelu terénu. Tato kapitola uvádí několik zásad při jeho tvorbě. V další části se zaměřuje na polyedrické a plátové modely.

3.1 Sběr dat

Data pro vytvoření DMR můžeme získat buď:

- novým zaměřením lokality
- fotogrametricky
- digitalizací stávající mapy
- z DMÚ - Vojenský informační systém

Vždy by se mělo jednat o body, které dokonale vystihují jednotlivé singularity terénu. To jsou především kosterní čáry terénu, tj. hřebetnice a údolnice. Dále by to měly být extrémy a změny sklonu svahu. Poslední nedílnou součástí pro vytvoření digitálního modelu jsou pevné hrany. Pevné hrany jsou zpravidla kosterní čáry terénu. Ukazují, kudy procházejí hlavni singularity terénu. Další vysvětlení bude kapitole 4.1.

3.2 Konstrukce DMR - TIN

Nyní máme k dispozici bodové pole a průběh pevných hran. Můžeme tedy vytvořit pomocí Delaunay triangulace digitální model TIN. Nejprve vysvětlení základních pojmů.

3.2.1 Nepravidelná trojúhelníková síť TIN

Nepravidelná trojúhelníková síť TIN je model terénu, který pomocí dílčích trojúhelníkových ploch reprezentuje skutečný terén. Vytvoření trojúhelníkové sítě se řídí přesně danými kritérii triangulace, jako jsou např.:

- tvarová kriteria - min-max výškové kriterium
  - min-max obsahove kriterium
- Delaunay kritérium

Definice Triangulace: Nechť je v rovině dáno N bodů. Spojme je neprotínajícími se úsečkami tak, aby každá vnitřní oblast konvexní obálky tvořila trojúhelník. Množinu těchto trojúhelníků nazýváme triangulací.

3.2.2 Delaunayova trinagulace

Delaunayova trinagulace je speciální případ triangulace, kde kriterium pro její vytvoření nejlépe říká tato věta dle [Stro02]:

Věta: Delaunayova trinagulace DT(P) množiny bodů P danných v E2 je množina vrcholů a hran (spojujících tyto vrcholy v síť trojúhelníků) takových, že platí:

1. Každý bod množiny P je vrcholem nejméně jednoho trojúhelníku z DT(P) a každý vrchol DT(P) je bodem množiny P
2. Průnik dvou různých hran DT(P) je buď prázdný, nebo je jím společný vrchol DT(P), tj. žádné dvě hrany se nekříží.
3. Pro každé tři vrcholy V1,V2,V3 DT(P) tvořící trojúhelník Ti z DT(P) platí, že vnitřek kružnice K(V1 V2 V3) opsané trojúhelníku Ti neobsahuje žádný jiný bod množiny P

4 Oprava TIN

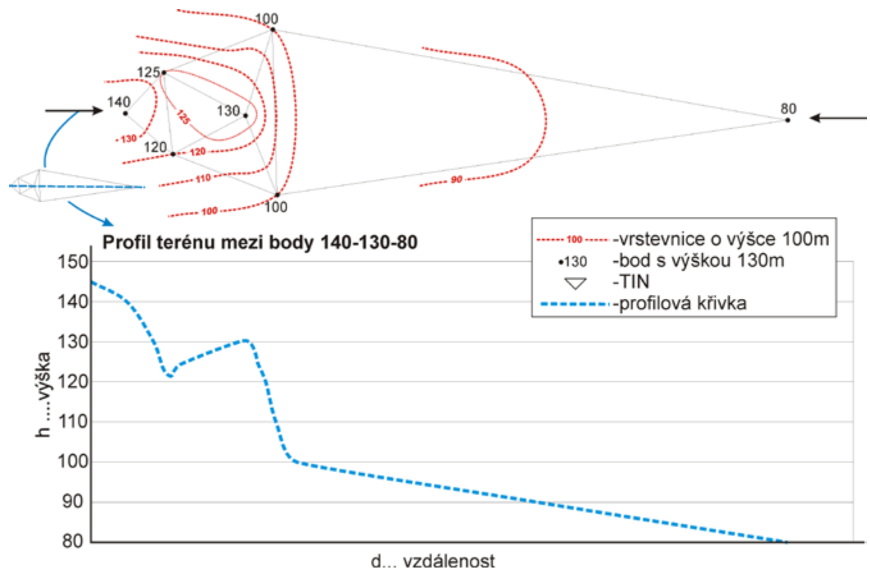
Delaunayova triangulace je v GIS nejpoužívanějším nástrojem pro tvorbu triangulace. Výstup však není zcela idealní, protože algoritmus na konstrukci TIN nepracuje s pevnymi hranami. Ty se dopočítávají až následně do hotového TIN.

4.1 Pevné hrany

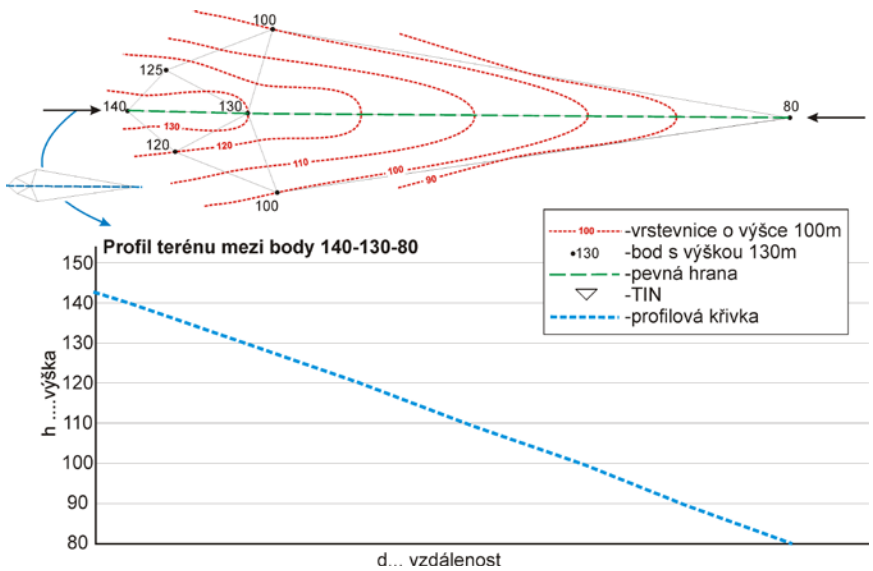
Jak již bylo řečeno, pevné hrany jsou zpravidla kosterní čáry terénu, tj. hřbetnice a údolnice. Dělíme je takto:

- **soft break lines** - to jsou takové pevné hrany, na kterých nedochází k lomu. Typickým příkladem je klasické české kulaté údolí s profilovým tvarem do písmene U.
- **hard break lines** - jsou naopak hrany, kdy v terénu dochází k lomu. Pokud použijeme podobný příklad, jako u soft break lines, bude to spíše horské údolí, kde profil terénu bude do písmene V

Plochu terénu tedy rozdělíme na dílčí malé plochy tak, aby hrany těchto oblastí kopírovaly výrazné změny v terénu a k tomu slouží pevné hrany. Význam použití pevných hran ukazuje profilová křivka na následujících obrázcích 5.1 a 5.2. Mezi body 140,130,80 procházi hřbetnice, čili by měla být implementována do TIN pevná hrana (*soft break line*).



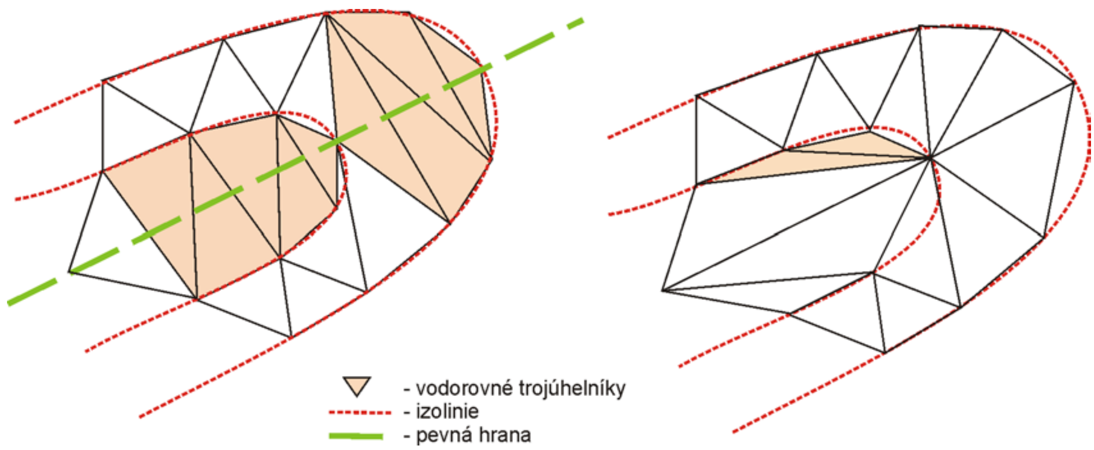
obr. 4.1: Vygenerované vrstevnice bez pevné hrany



obr. 4.2: Vygenerované vrstevnice po zavedení pevné hrany mezi body 140-130-80

4.2 Vodorovné trojúhelníky

Další problémy při opravě TIN souvisí se způsobem sběru dat. Jsou to vodorovné trojúhelníky, které vznikají především při digitalizaci mapy. Výškopis se digitalizuje po vrstevnicích. Tím dochází k tomu, že existuje mnoho bodů o stejné nadmořské výšce. Tyto body pak mohou vytvořit při triangulaci vodorovné trojúhelníky. Pokud pak budeme pracovat s polyedrickým modelem, kde plocha trojúhelníku je rovina, algoritmus nebude schopen rozhodnout, kudy bude procházet vrstevnice. Existují však algoritmy, které dokáží automaticky vygenerovat kosterní čáry, což má za následek značnou redukci takovýchto trojúhelníků, viz. obr.4.3. Po zavedení kosterních čar, pevných hran se vodorovné trojúhelníky zredukovaly na dva. I tyto dva trojúhelníky se musí odstranit, tuhle eliminaci zbylých trojúhelníků řeší [Gokg99] a [Gulg03]. Dalším možným řešením je používat plátový model, kde se předpokládá, že plocha trojúhelníku je obecně křivá. Ovšem algoritmická složitost těchto řešení je příliš velká a někdy značně omezující.



obr. 4.3: Eliminace trojúhelníků po zavedení pevné hrany do TIN

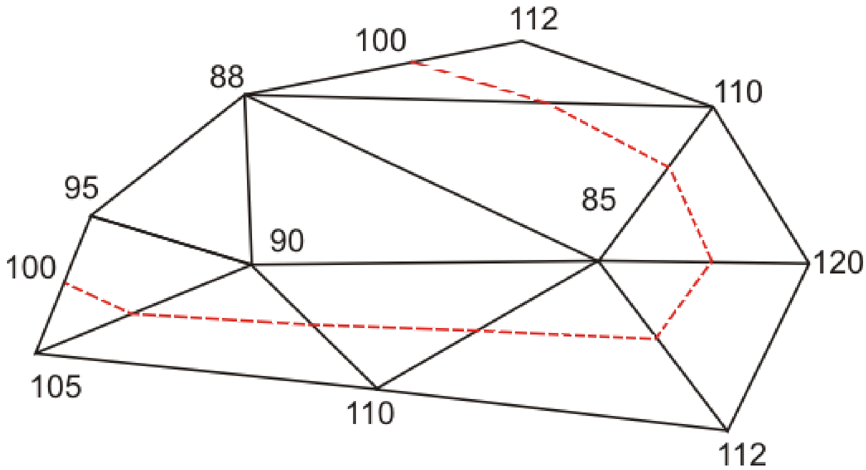
5 Generování vrstevnic na polyedrickém modelu

Takto správně vytvořený TIN je vhodný k extrahování vrstevnic. To se rozkládá na dvě části.

1. Pomocí lineární interpolace vypočítat průběh vrstevnic (lomená čára).
2. Vyhlazení lomené čáry

5.1 Algoritmus lineární interpolace

Nejdříve se stanoví ekvidistance, tedy rozestup jednotlivých izolinií. Algoritmus následně vyhledá všechny spojnice vrcholů - hrany, které izolinie protíná. V dalším kroku se vypočtou souřadnice x,y těchto bodů lineární interpolací. Výpočet je velmi jednoduchý. Vypočteme poměr převýšení vrcholu V1 a V2. Pak na základě podobnosti trojúhelníků dopočteme souřadnice bodu, kde vrstevnice protíná hranu. Posledním krokem je pospojování bodů na hranách vrstevnice. [Tucek99]

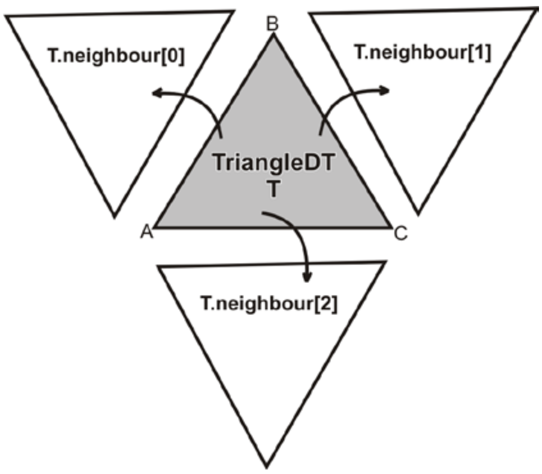


obr. 5.1: Vygenerovaná vrstevnice lineární interpolací [Cerma02]

Výhodou tohoto algoritmu je, že každý trojúhelník se prohledává jen jednou a ihned se vygenerují všechny vrstevnice. Pak musí následovat setřídění, tj. setřídit linie tak, jak na sebe navazují. To je důležité pro vyhlazovací algoritmy, které potřebují znát návaznost linie. Složitost toho algoritmu bude $\Theta(n+k+l)$, kde n je počet trojúhelníků, k je složitost pro uložení do datové struktury a l je složitost vhodného vyhledávacího algoritmu pro setřídění. Jelikož se nacházíme v prostoru, musíme volit prostorovou datovou strukturu, která bude držet vygenerované linie a zároveň poskytne rychlý vyhledávací algoritmus pro setřídění.
Dobrou datovou strukturou by mohl být K-D strom. Jelikož se jedná o binární vyhledávací strom, je složitost pro uložení $\Theta(\log k)$, pro vyhledání konkrétního prvku $\Theta(\log k)$, kde k je počet bodů vrstevnice se stejnou nadmořskou výškou. Výsledná složitost celého algoritmu by se pak byla $\Theta(n + 2m \log k)$, kde m je počet druhů vrstevnic či izolinií.

5.2 Algoritmus Brute - Force

Tento způsob byl použit [Cermak02]. Vychází z podstaty datové struktury pro TIN, viz obr. 5.2.



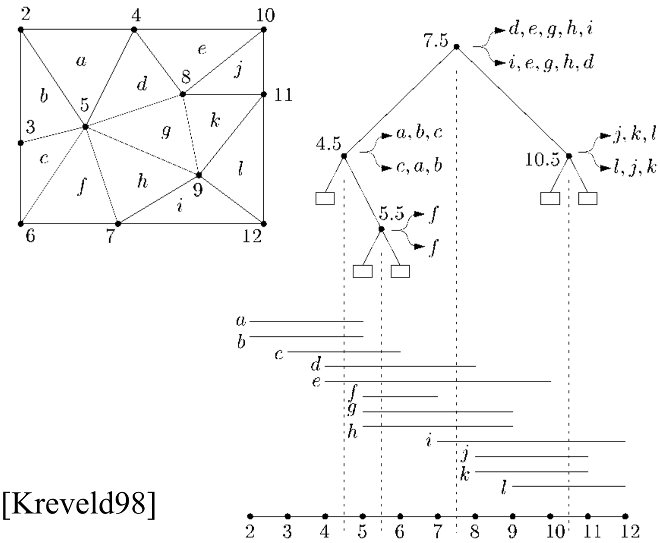
obr. 5.2: Datová struktura síťového modelu

Tzv. síťový model datové struktury spočívá v přidání topologické informace každému

trojúhelníku o jeho sousedech. To znamená, že když budeme interpolovat vrstevnici v trojúhelníku T, můžeme rovnou udělat návaznost linie na další trojúhelník, protože trojúhelník v sobě nese odkazy na sousedy. [Stro02].
Výhodou je, že nemusíme linie třídit a získáme rovnou návaznost. Nevýhodou je složitost. U takto postaveného algoritmu nemůžeme řešit všechny vrstevnice najednou, ale po jedné. To vede ke složitosti Θ(nm), kde n je počet trojúhelníků a m je počet izolinií.

5.3 Algoritmus intervalového stromu

Výše popsané algoritmy poskytují neuspokojivé výsledky, zvláště když počet trojúhelníků, kterými prochází izolinie o výšce Z, je mnohem menší než celkový počet trojúhelníků. Zde je možné použít intervalových stromů, které poskytují účinější řešení. Nevýhodou zůstává, že data musíme předzpracovat, čili uložit do intervalového stromu. [Kreveld98].
Intervalový strom je prostorový strom, kde klíč pro uložení je interval, tedy úsečka jak ukazuje obrázek 5.3.



obr. 5.3: intervalový strom [Kreveld98]

Máme množinu *I* na intervalu (*a,b*), kde *a,b* ϵ R a *a*<*b*. Root takového stromu bude tvořit prvek *s,* který je mediánem všech intervalů nebo střed množiny *I*. Levý podstrom I_{left}, bude podmnožinou *I,* jako interval (a,s). Pravý podstrom bude opět podmnožinou *I*, ale interval (*s,b*). V každém uzlu stromu jsou vypsány jednotlivé intervaly, které hodnota uzlu protíná. Jsou to dva seznamy pro levý a pravý podstrom. Pro levý podstrom jsou intervaly řazené podle počáteční hodnoty vzestupně a pro pravý podle koncové hodnoty sestupně.

5.3.1 Uložení

Uložení do této datové struktury je následující. Nově vstupující interval se nejprve otestuje s kořenem (*rootem)*, zda interval obsahuje kořen. Jestliže ano, uloží se odkaz na interval do obou seznamů levého a pravého podstromu. V případě, že nově vstupující interval kořen neobsahuje, postupuje dále stromem, až dojde k uzlu, který interval protne. Intervalový strom je binární. Je zde tedy určitá analogie s binárními vyhledávacími stromy (BVS) a to především ve vlastním průchodu stromem. Stejně jako u BVS se strom prochází rekurzivně a to tak, že otestujeme hodnotu uzlu a pak pokračujeme do levého podstromu, když hodnota je menší a opačně do pravého podstromu. Může se stát, že takový uzel nebude existovat, tzn. dostaneme se až na list stromu. Pak musíme vytvořit nový uzel jehož hodnota, by dle [Kreveld98], měla být střed nově vstupujícího intervalu. Používá se také, souměrné dělení intervalů, vzhledem k hodnotám v uzlech.

5.3.2 Vyhledání

Algoritmus poskytuje prostředek, jak velice rychle nalézt všechny intervaly, které obsahují námi zadanou hodnotu q. Začne se procházet strom, stejně jako u BVS a v každém uzlu provedeme tento test. Nejprve se testuje q s hodnotou uzlu. Je-lil hodnota uzlu větší testujeme intervaly v levém podstromu. Test končí, jakmile se najde první interval, který neobsahuje q a pokračuje v dalším podstromu. Vyhledávání končí, když uzel je listem.

5.4 Vyhlazovací algoritmy

Extrahované izolinie jsou lomené čáry, které jsou přímo použitelné v GIS softwarech, protože se mohou uložit jako soubor typu shapefile. Pokud potřebujeme izolinie vyhlazené je potřeba použít některý z následujících algoritmů. Výstupem v takovém případě už nebude shapefile, protože hladké křivky shapefile nepodporuje. Dle [Cermak02] se dělí vyhlazovací algoritmy do těchto skupin:

- váhové průměrování (Weighted averages)
  - např. McMasterův algoritmus průměrování posunem
- filtrování pomocí epsilon okolí
  - Chaikensův vyhlazovací algortimus
- matematické aproximace, spline, B-spline, Bézierova křivka

6 Generování vrstevnic na plátovém modelu

U plátového modelu je plocha trojúhelníka obecně křivá. Definování takové plochy vyžaduje velmi složitý matematický aparát, ale výsledné izolinie pak věrněji zobrazují skutečný terén. Extrahované izolinie se nemusí vyhlazovat, protože při dostatečně malém kroku, je interpolovaná izolinie hladká. Pro tyto metody se nejčastěji používají

- Beziérovy trojúhelníkové pláty
- 2nd exact fit surface (TIN)
- Quintic interpolation

6.1 Beziérovy trojúhelníkové pláty

Beziérovy trojúhelníkové pláty jsou přímým zobecněním Beziérových křivek. Zde je nutné použít Barycentrické souřadnice a modifikovat Bersteinovy polynomy. Podobně jako u Beziérových křivek, i zde geometrii plátu tvoří řídící body, tzv. řídící polyedr plátu. K výpočtu se používá algoritmus De Casteljau. [Jezek06]
Tuto metodu se pokoušeli implementovat v [Cermak02]. Ovšem narazil na problém určení řídících bodů. Nakonec tuto metodu opustil.

6.2 2nd exact fit surface

Další z používaných nelineárních interpolací. Tato metoda je velmi jednoduchá, snaží se částečně odstranit nevýhody lineární interpolace, konkrétně efekt lomené čáry. Reliéf je reprezentován hladkou souvislou plochou. Metoda opět předpokládá zaoblenost trojúhelníků, čili nejsou rovinné, ale jsou reprezentovány polynomem druhého stupně. Tento polynom má šest koeficientů. Průběh je definován šesti body, třemi vrcholy trojúhelníka a třemi protilehlými body. Výsledná plocha prochází všemi šesti body. Hladká je v rámci trojúhelníka. Problém nastává na styku dvou trojúhelníků, kde není hladkost zaručena.

Výhody této metody jsou snadná implementace, hladký průběh izolinie uvnitř trojúhelníka. Nevýhodou zůstává, že není zaručena hladkost na styku dvou trojúhelníků, proto i extrahované izolinie budou lomené, tvořené oblouky. [web02]

6.3 Quintic interpolation

Quintic je interpolace, která generuje spline plochu polynomem pátého řádu. Quintic opět přepokládá spojitý průběh povrchu. Navíc je zaručeno spojitost i hladkost napříč hranami mezi trojúhelníky. Problém bude její značná matematická a výpočetní náročnost. Pro stanovení plátu je potřeba 21 koeficientů a jejich nalezení není jednoduché. Výhodou je dokonale hladký a spojitý povrch. Vygenerované izolinie mohou být hladké při dostatečně malém kroku. Tato interpolace poskytuje jeden z nejlepších nástrojů pro vizualizaci terénu. [web02]

7 Kombinace lineární a nelineární interpolace

Obě interpolace mají své výhody a nevýhody. Kombinací těchto metod by se mohl částečně optimalizovat algoritmus extrahování izolinií. Nelineární interpolace dokáže věrně přiblížit skutečný terén, problém je její algoritmická složitost. Navíc pomocí nelineární interpolace umíme vypočítat k zadaným souřadnicím hodnotu Z, ale my potřebuje funkci inverzní k zadané výšce dopočítat souřadnice x,y. To je u některých interpolací neřešitelný problém.

Proto se používá tato kombinace. Rozdělíme trojúhelník na malé trojúhelníky, [Cermak02]. Souřadnice x,y dopočteme pomocí lineární interpolace a hodnotu výšek vrcholů pomocí nelineární interpolace. Z takto zhustěných trojúhelníků extrahujeme izolinie lineární interpolací. Výsledkem bude lomená čára, která bude aproximovat izolinii generovanou nelineární interpolací. Když by se vzal limitní případ, kdy budeme navyšovat počet trojúhelníků, tedy obsah trojúhelníků se bude limitně blížit nule, lomená čára a křivka získaná nelineární interpolací se ztotožní.

8 Závěr

V rámci této práce byla přiblížena problematika generování izolinií a s ní související algoritmy. Je ukázána jednoduchost a efektivnost lineární interpolace, ale zároveň nastiňuje velice komplikované řešení pomocí nelineárních interpolací. Kombinací těchto metod je možno získat zajímavé řešení, kterému se bude věnovat v navazující diplomová práce.

Použité zdroje - literatura:

[Jezek06] Ježek, F. *Geometrické počítačové modelování.* Pomocný učební text. Plzeň: Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd. Katedra matematiky, 2006.

[Cermak02] Čermák, P. *Výpočet vrstevnic na trojúhelníkové síti.* Diplomová práce. Plzeň: Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd. Katedra matematiky, 2002.
Vedoucí diplomové práce Doc. Dr. Ing. Ivana Kolingerová.

[Gokg99] Gökgöz,T. *A New Approach for Simplification of Contours.* Disertation. Istambul: Yildiz Technical University. 1999

[Gulg03] Gūlgen, F. *Automatic Derivationof Skeleton Lines of Terrain from Digital Elevation Models.* Disertation. Istambul: Yildiz Technical University. 2003

[Tucek99] Tuček, J. *Geografické informační systémy Principy a praxe.* Praha: Computer Press. 1998.

[Kreveld98] Kreveld, M. *Digital Elvation Models and TIN Algorithms. 1998.*

[Stro02] Stropek, I. *Triangulace a rekonstrukce v GIS a tvorba digitálního modelu terénu.* Diplomová práce. Plzeň: Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd. Katedra matematiky, 2002. Vedoucí diplomové práce Doc. RNDr. František Ježek, CSc.

Použité zdroje - internet:

[wiki] Wikipedia [online]. [citováno 17.11.2007]. Dostupné z: http://www.wikipedia.org/